

湖南师大附中 2021 届高三三月考试卷(七)

数 学

命题人：

审题人：

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 10 页.时量 120 分钟.满分 150 分.

第 I 卷

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知命题“若 α , 则 β ”是真命题,集合 $M=\{x|x \text{ 满足 } \alpha\}$, 集合 $N=\{x|x \text{ 满足 } \beta\}$. 下列判断正确的是

A. $M \subset N$

B. $M \subseteq N$

C. $M=N$

D. $M \supseteq N$

2. 满足条件 $|z-1|=|3+4i|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是

A. 直线

B. 圆

C. 椭圆

D. 抛物线

3. 2021 年春节临近,在河北省某地新冠肺炎疫情感染人数激增,为防控需要,南通市某医院呼吸科准备从 5 名男医生和 3 名女医生中选派 3 人前往 3 个隔离点进行核酸检测采样工作,则选派的 3 人中至少有 1 名女医生的概率为 ()

A. $\frac{23}{28}$

B. $\frac{5}{14}$

C. $\frac{15}{56}$

D. $\frac{2}{7}$

4. 中国的 5G 技术领先世界,5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式: $C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$, 它表示:在受噪声干扰的信道中,最大信息传递速率 C 取决于信道带宽 W 、信道内信号的平均功率 S 、信道内部的高斯噪声功率 N 的大小,其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 按照香农公式,若不改变带宽 W ,而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 1000 提升至 5000,则 C 大约增加了 ($\lg 2 \approx 0.3010$) ()

A. 20%

B. 23%

C. 28%

D. 50%

5. 已知 a, b 是非零向量且满足 $(a-2b) \perp a, (b-2a) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-9, a_5=-1$. 记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n (n=1, 2, \cdots)$, 则数列 $\{T_n\}$ ()

A. 有最大项,有最小项

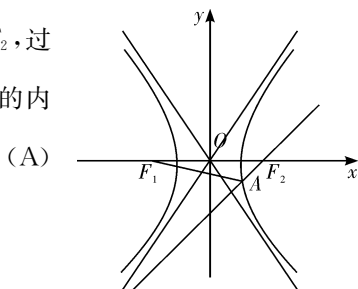
B. 有最大项,无最小项

C. 无最大项,有最小项

D. 无最大项,无最小项

7. 已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 8 - f(4+x)$, 函数 $g(x) = \frac{4x+3}{x-2}$, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象共有 168 个交点, 从左往右依次记作 $P_i(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 168)$, 则 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_{168} + y_{168})$ 的值为 ()
- A. 2018 B. 2017 C. 2016 D. 1008

8. 如图, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点作平行于一条渐近线的直线交双曲线于点 A , 若 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\frac{b}{4}$, 则双曲线的离心率为



- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{4}$
C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知: $a < b < 0$, 则下列不等式正确的是 ()

- A. $a^2 > ab$ B. $\ln(1-a) > \ln(1-b)$
C. $\frac{2}{a+b} > -\frac{1}{\sqrt{ab}}$ D. $a + \cos b > b + \cos a$

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过点 F 的直线与抛物线交于两点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 点 P 在 l 上的射影为 P_1 , 则 ()

- A. $|PQ|$ 的最小值为 4
B. 已知曲线 C 上的两点 S, T 到点 F 的距离之和为 10, 则线段 ST 的中点横坐标是 4
C. 设 $M(0, 1)$, 则 $|PM| + |PP_1| \geq \sqrt{2}$
D. 过 $M(0, 1)$ 与抛物线 C 有且仅有一个公共点的直线至多有 2 条

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上是单调函数, 且 $f(0) = f(\pi) = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. 则 ω 的可能取值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. 2
C. $\frac{1}{3}$ D. 1

12. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x) (f(x) \neq g(x))$ 的定义域的交集为 M , 若 $\exists x_0, \forall x \in M$, 不等式 $[f(x) - g(x)](x - x_0) \geq 0$ 恒成立, 则称 $(f(x), g(x))$ 构成“相关函数对”, 下列所给的两个函数构成“相关函数对”的有 ()

A. $f(x)=x, g(x)=x^3$

B. $f(x)=\ln x, g(x)=\frac{1}{x}$

C. $f(x)=2x-1, g(x)=x^2$

D. $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

第Ⅱ卷

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 设 i 为虚数单位,则 $(x+i)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为 _____.

14. 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$,则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

15. 假设太阳光线垂直于平面 α ,在阳光下任意转动棱长为 1 的立方体,则它在平面 α 上的投影面面积的最大值是 _____.

16. 设函数 $f(x) = |\ln x - x - m|$ ($m \in \mathbf{R}$),记 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最大值为 $h(m)$,则当 $m =$ _____ 时, $h(m)$ 的最小值为 _____. (e 为自然对数的底数)(第一空 2 分,第二空 3 分)

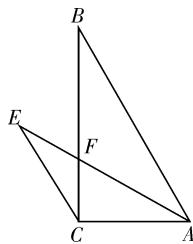
四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在如图所示的平面图形中, $AB=2, BC=\sqrt{3}, \angle ABC = \angle AEC = \frac{\pi}{6}$, AE 与 BC 交于点 F ,若 $\angle CAE = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 用 θ 表示 AE, AF ;

(2) 求 $\frac{AE}{AF}$ 取最大值时 θ 的值.

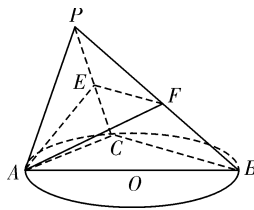


18. (本小题满分 12 分)

如图, C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A, B 的点,平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle PAC$ 中, $PA=PC=AC=2, BC=4, E, F$ 分别是 PC, PB 的中点.

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;

(2) 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l ,点 Q 为直线 l 上动点,求直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的取值范围.



19. (本小题满分 12 分)

新型冠状病毒的传染主要是人与人之间进行传播,感染人群年龄大多数是 50 岁以上人群. 该病毒进入人体后有潜伏期,潜伏期是指病原体侵入人体至最早出现临床症状的这段时间. 潜伏期越长,感染到他人的可能性越高,现对 400 个病例的潜伏期(单位:天)进行调查,统计发现潜伏期平均数为 7.2,方差为 2.25^2 . 如果认为超过 8 天的潜伏期属于“长潜伏期”,按照年龄统计样本,得到下面的列联表:

年龄/人数	长期潜伏	非长期潜伏
50 岁以上	60	220
50 岁及 50 岁以下	40	80

- (1) 是否有 95% 的把握认为“长期潜伏”与年龄有关;
- (2) 假设潜伏期 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2 .
- (i) 现在很多省市对入境旅客一律要求隔离 14 天,请用概率的知识解释其合理性;
- (ii) 以题目中的样本频率估计概率,设 1000 个病例中恰有 $k(k \in \mathbf{N}^*)$ 个属于“长期潜伏”的概率是 $p(k)$,当 k 为何值时, $p(k)$ 取得最大值.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6862$. $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

20. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{b_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 在 b_1 和 b_2 之间插入 1 个数 x_{11} , 使 b_1, x_{11}, b_2 成等差数列; 在 b_2 和 b_3 之间插入 2 个数 x_{21}, x_{22} , 使 b_2, x_{21}, x_{22}, b_3 成等差数列; $\cdots$; 在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nm}$, 使 $b_n, x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nm}, b_{n+1}$ 成等差数列.

- (1) 试写出 x_{11}, x_{21}, x_{22} .
- (2) 求 $T_n = x_{11} + x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm}$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 以原点 O 为圆心, 椭圆 C 的长半轴长为半径的

圆与直线 $2x - \sqrt{2}y + 6 = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知点 A, B 为动直线 $y = k(x - 2) (k \neq 0)$ 与椭圆 C 的两个交点, 问: 在 x 轴上是否存在定点 E , 使得 $\overrightarrow{EA}^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB}$ 为定值? 若存在, 试求出点 E 的坐标和定值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - e^{\frac{\pi}{2} - x} + 1$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 且 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(1) 求 a 的值, 并判断 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性;

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	A	B	B	B	D	A	ABC	ABC	AB	BD

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. B 【解析】命题“若 α , 则 β ”是真命题,即满足 α , 一定满足 β , 故 $M \subseteq N$.

2. B 【解析】设 $z = x + yi$, 由 $|z - 1| = |3 + 4i|$, 可得 $|(x - 1) + yi| = |3 + 4i|$, 即 $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$, 两边同时平方可得 $(x - 1)^2 + y^2 = 25$, 所以复数 z 在复平面上对应点的轨迹是以 $(1, 0)$ 为圆心, 5 为半径的圆.

3. A 【解析】南通市某医院呼吸科准备从 5 名男医生和 3 名女医生中选派 3 人前往 3 个隔离点进行核酸检测采样工作, 基本事件总数 $n = C_8^3 = 56$, 选派的 3 人中至少有 1 名女医生包含的基本事件个数 $m = C_8^3 - C_5^3 = 46$, $\therefore$ 选派的 3 人中至少有 1 名女医生的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$.

4. B 【解析】将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 1000 提升到 5000 时, C 大约增加了 $\frac{W \log_2(1 + 5000) - W \log_2(1 + 1000)}{W \log_2(1 + 1000)} = \frac{\log_2 5001 - \log_2 1001}{\log_2 1001} \approx \frac{\lg 5000 - \lg 1000}{\lg 2} - \frac{\lg 1000}{\lg 2} = \frac{1 - \lg 2}{3} \approx 0.23 = 23\%$.

5. B 【解析】 $\because (a - 2b) \perp a, (b - 2a) \perp b, \therefore (a - 2b) \cdot a = a^2 - 2a \cdot b = 0, (b - 2a) \cdot b = b^2 - 2a \cdot b = 0, \therefore a^2 = b^2 = 2a \cdot b$, 设 a 与 b 的夹角为 θ , 则由两个向量的夹角公式得 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a \cdot b}{a^2} = \frac{a \cdot b}{2a \cdot b} = \frac{1}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$, 故选 B.

6. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_1 = -9, a_5 = -1$, 得 $d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{-1 - (-9)}{4} = 2, \therefore a_n = -9 + 2(n - 1) = 2n - 11$. 由 $a_n = 2n - 11 = 0$, 得 $n = \frac{11}{2}$, 而 $n \in \mathbb{N}^*$, 可知数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 且前 5 项为负值, 自第 6 项开始为正值. 可知 $T_1 = -9 < 0, T_2 = 63 > 0, T_3 = -315 < 0, T_4 = 945 > 0$ 为最大项, 自 T_5 起均小于 0, 且逐渐减小. $\therefore$ 数列 $\{T_n\}$ 有最大项, 无最小项. 故选 B.

7. D 【解析】函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(-x) = 8 - f(4 + x)$, 可得: $f(-x) + f(4 + x) = 8$, 即函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 4)$ 对称, 函数 $g(x) = \frac{4x + 3}{x - 2} = 4 + \frac{11}{x - 2}$, 可知图象关于 $(2, 4)$ 对称; $\therefore$ 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象共有 168 个交点, 即在 $(2, 4)$ 两边各有 84 个交点. 而每个对称点都有: $x_i + x_{168 - i} = 4, y_i + y_{168 - i} = 8, \therefore$ 有 168 个交点, 即有 84 组. 故得: $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{168} + y_{168}) = (4 + 8) \times 84 = 1008$.

8. A 【解析】设双曲线的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 设双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 可得直线 AF_2 的方程为 $y = \frac{b}{a}(x - c)$, 联立双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$, 可得 $A\left(\frac{c^2 + a^2}{2c}, \frac{b(a^2 - c^2)}{2ac}\right)$, 设 $|AF_1| = m, |AF_2| = n$, 由三角形面积的等积法可得 $\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}(m + n + 2c) = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{b(c^2 - a^2)}{2ac}$, 化简可得 $m + n = \frac{4c^2}{a} - 4a - 2c$. ①

由双曲线的定义可得 $m - n = 2a$. ②

在三角形 AF_1F_2 中 $n \sin \theta = \frac{b(c^2 - a^2)}{2ac}$ (θ 为直线 AF_2 的倾斜角),

由 $\tan \theta = \frac{b}{a}, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 可得 $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{c}$, 可得 $n = \frac{c^2 - a^2}{2a}$. ③

由①②③化简可得 $3c^2 - 2ac - 5a^2 = 0$, 即为 $(3c - 5a)(c + a) = 0$,

可得 $3c = 5a$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

9. ABC 【解析】A, B 显然正确, 对于 C, $\because a < b < 0, \therefore \frac{-a - b}{2} > \sqrt{ab}, \therefore \frac{2}{a + b} > -\frac{1}{\sqrt{ab}}$, 故正确; 对于 D, 构造函数 $f(x) = x - \cos x$, 由 $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, 知 $f(x) = x - \cos x$ 为增函数, $\therefore a - \cos a < b - \cos b, \therefore a + \cos b < b + \cos a$, 故错误, 故选 ABC.

10. ABC 【解析】由题知, $\frac{p}{2}=1$, 抛物线 C 的焦点 $F(1,0)$, 准线方程为 $x=-1$. A. 当 $PQ \perp x$ 轴时, $|PQ|$ 的最小值为 4; B. 曲线 C 上的两点 S, T 到点 F 的距离之和为 10, 所以点 S, T 的横坐标之和为 $10-2=8$, 线段 ST 的中点横坐标是 4, 所以 B 正确; C. 设 $M(0,1)$, 则 $|PM|+|PP_1|=|PM|+|PF| \geq |FM|=\sqrt{2}$, 当且仅当 M, P, F 三点共线时知成立, 所以 C 正确; D. 当直线过点 $M(0,1)$ 且与 x 轴平行时, 直线与抛物线 C 有且只有一个公共点, 过点 $M(0,1)$ 且与抛物线 C 相切的直线有两条, 此时直线与抛物线 C 有且只有一个公共点, 所以过点 $M(0,1)$ 与抛物线 C 有且只有一个公共点的直线有 3 条, 所以 D 错误.

11. AB 【解析】函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$) 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上是单调函数, 则 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2}$ 即: $T \geq \pi$, $\therefore 0 < \omega \leq 2$, 若 $T > \pi$, $\therefore f(0)=f(\pi)$, $\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图像的一条对称轴, $f(0)=-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 即 $f(0)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\therefore f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称. 又 $T > \pi$, $\therefore \frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}$, 即 $T=3\pi, \omega=\frac{2}{3}$, 若 $T=\pi, \omega=2$.

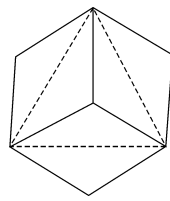
12. BD 【解析】要使函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 构成“相关函数对”, 需使两个函数位于直线 $x=x_0$ 的右侧的图像中 $f(x)$ 的图像高于 $g(x)$ 的图像, 直线 $x=x_0$ 的左侧, $f(x)$ 的图像低于 $g(x)$ 的图像, 两个函数图像有且只有一个交点.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $-15x^4$ 【解析】通项 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r} i^r$ ($r=0,1,2,\dots,6$), 令 $r=2$, 得含 x^4 的项为 $C_6^2 x^4 i^2=-15x^4$.

14. $\frac{1}{6}$ 【解析】因为 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}$, 所以 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$.

15. $\sqrt{3}$ 【解析】当正方体与底面只有一个交点时, 并且过此点的体对角线所在直线与此平面垂直, 这时投影面积最大, 如图为此时正方体在平面 α 内的投影, 此图形是正六边形, 中间虚线构成等边三角形, 并且边长为正方体面对角线长, 长度为 $\sqrt{2}$, 此等边三角形的面积 $S=\frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 正六边形的面积 $=2S=\sqrt{3}$.



16. $-\frac{e}{2}$ (2 分) $-\frac{e}{2}-1$ (3 分) 【解析】令 $g(x)=\ln x-x$, 则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$, 当 $1 < x < e$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $\frac{1}{e} < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 也是最大值, 即 $g(x)_{\max}=-1, g(e)=1-e < g\left(\frac{1}{e}\right)=-1-\frac{1}{e}, g(x) \in [1-e, -1], g(x)-m \in [1-e-m, -1-m]$, 当 $m < -\frac{e}{2}$ 时, $f(x)_{\max}=|-1-m|=-m-1$, 当 $m \geq -\frac{e}{2}$ 时, $f(x)_{\max}=|1-e-m|=m+e-1$, 所以

$$h(m)=\begin{cases} -m-1, & m < -\frac{e}{2}, \\ m+e-1, & m \geq -\frac{e}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } h(m)_{\min}=h\left(-\frac{e}{2}\right)=\frac{e}{2}-1.$$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由题意可知在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可知 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$$\text{可得 } AC=1, \text{ 且 } \angle ACB=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{在 } \triangle ACE \text{ 中, 因为 } E=\frac{\pi}{6}, \angle CAE=\theta, \text{ 所以 } \angle ACE=\frac{5\pi}{6}-\theta, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理可得: } \frac{AE}{\sin \angle ACE}=\frac{AC}{\sin E}, \text{ 所以 } AE=2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right),$$

$$\text{在 Rt} \triangle ACF \text{ 中, } AF=\frac{AC}{\cos \theta}=\frac{1}{\cos \theta} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } \frac{AE}{AF}=2 \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \frac{AE}{AF}=2 \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)=\cos^2 \theta+\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta=\frac{1+\cos 2\theta+\sqrt{3} \sin 2\theta}{2}=\frac{1}{2}+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以 } 2\theta+\frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \text{ 时, 即 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{ 时, } \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \text{ 取得最大值 } 1, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{AE}{AF} \text{ 取最大值时, } \theta=\frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】(1) 证明: $\because BC \perp AC$, 平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC=AC$, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,

$$BC \subset \text{平面 } ABC, \therefore BC \perp \text{平面 } PAC. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)由已知, $BC \parallel EF$, 又 $EF \subset \text{平面 } EFA, BC \not\subset \text{平面 } EFA, \therefore BC \parallel \text{平面 } EFA$,

又 $BC \subset \text{平面 } ABC, \text{平面 } EFA \cap \text{平面 } ABC = l, \therefore BC \parallel l$,

以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 过 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $A(2, 0,$

$$0), B(0, 4, 0), P(1, 0, \sqrt{3}), \therefore E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{EF} = (0, 2, 0),$$

$\therefore BC \parallel l, \therefore$ 可设 $Q(2, y, 0)$, 平面 AEF 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot m = -\frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{3}z}{2} = 0, \\ \overrightarrow{EF} \cdot m = 2y = 0, \end{cases} \text{取 } z = \sqrt{3}, \text{得 } m = (1, 0, \sqrt{3}), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PQ} = (1, y, -\sqrt{3}), \text{则 } |\cos \langle \overrightarrow{PQ}, m \rangle| = \frac{1}{\sqrt{4+y^2}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } PQ \text{ 与平面 } AEF \text{ 所成角的取值范围为 } \left(0, \frac{\pi}{6}\right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.【解析】(1)依题意有 $K^2 = \frac{400 \times (60 \times 80 - 220 \times 40)^2}{280 \times 120 \times 100 \times 300} \approx 6.35$,

由于 $6.35 > 3.841$, 故有 95% 的把握认为“长期潜伏”与年龄有关; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)(i) 若潜伏期 $X \sim N(7.2, 2.25^2)$, 由 $P(X \geq 13.95) = \frac{1 - 0.9974}{2} = 0.0013$,

得知潜伏期超过 14 天的概率很低, 因此隔离 14 天是合理的; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(ii) 由于 400 个病例中有 100 个属于长潜伏期,

若以样本频率估计概率, 一个患者属于“长潜伏期”的概率是 $\frac{1}{4}$,

于是 $p(k) = C_{1000}^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{1000-k}$.

$$\text{则 } \frac{p(k)}{p(k-1)} = \frac{C_{1000}^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{1000-k}}{C_{1000}^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{1001-k}} = \frac{C_{1000}^k}{3C_{1000}^{k-1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(k-1)! (1001-k)!}{k! (1000-k)!} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1001}{k} - 1\right).$$

当 $0 < k < \frac{1001}{4}$ 时, $\frac{p(k)}{p(k-1)} > 1$;

当 $\frac{1001}{4} < k \leq 1000$ 时, $\frac{p(k)}{p(k-1)} < 1$;

$\therefore p(1) < p(2) < \dots < p(250), p(250) > p(251) > \dots > p(1000)$.

故当 $k=250$ 时, $p(k)$ 取得最大值. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20.【解析】依题意 $b_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(1) $x_{11} = \frac{1}{3}, x_{21} = \frac{7}{54}, x_{22} = \frac{5}{54}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}$,

$\therefore b_n, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}, b_{n+1}$ 成等差数列, 设公差为 d_n ,

$$\therefore d_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{(n+2) - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{n+1} = -\frac{1}{3^n(n+1)},$$

则 $x_{nk} = b_n + kd_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{k}{3^n(n+1)}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore \sum_{k=1}^n x_{nk} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot n - \frac{1}{3^n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{3^n},$$

$$\therefore T_n = x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}, \textcircled{1}$$

则 $\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \textcircled{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

①-②,得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^{n+1}},$

$\therefore T_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} - \frac{n}{2 \cdot 3^n}.$ 12 分

21.【解析】(1)由 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$,得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,即 $c = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ①

以原点 O 为圆心,椭圆 C 的长半轴长为半径的圆为 $x^2 + y^2 = a^2$,

此圆与直线 $2x - \sqrt{2}y + 6 = 0$ 相切, $\therefore a = \frac{6}{\sqrt{4+2}} = \sqrt{6}$,代入①得 $c = 2, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$ 4 分

(2)由 $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-2), \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0,$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Delta > 0, \therefore x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{12k^2-6}{1+3k^2}.$ 6 分

根据题意,假设 x 轴上存在定点 $E(m, 0)$,

使得 $\vec{EA}^2 + \vec{EA} \cdot \vec{AB} = (\vec{EA} + \vec{AB}) \cdot \vec{EA} = \vec{EA} \cdot \vec{EB}$ 为定值,

则有 $\vec{EA} \cdot \vec{EB} = (x_1 - m, y_1) \cdot (x_2 - m, y_2) = (x_1 - m) \cdot (x_2 - m) + y_1y_2$

$= (x_1 - m)(x_2 - m) + k^2(x_1 - 2)(x_2 - 2)$

$= (k^2 + 1)x_1x_2 - (2k^2 + m)(x_1 + x_2) + 4k^2 + m^2$

$= (k^2 + 1) \cdot \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2} - (2k^2 + m) \cdot \frac{12k^2}{1 + 3k^2} + 4k^2 + m^2$

$= \frac{(3m^2 - 12m + 10)k^2 + m^2 - 6}{3k^2 + 1},$

要使上式为定值,即与 k 无关, 9 分

则应有 $3m^2 - 12m + 10 = 3(m^2 - 6),$

即 $m = \frac{7}{3}$,此时 $\vec{EA}^2 + \vec{EA} \cdot \vec{AB} = m^2 - 6 = -\frac{5}{9}$ 为定值, 11 分

所以在 x 轴上存在定点 $E\left(\frac{7}{3}, 0\right)$,使得 $\vec{EA}^2 + \vec{EA} \cdot \vec{AB}$ 为定值,且定值为 $-\frac{5}{9}.$ 12 分

22.【解析】(1) $f(x) = a\cos x - e^{\frac{\pi}{2}-x} + 1, f'(x) = -a\sin x + e^{\frac{\pi}{2}-x}.$

由 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,得 $a = 1. f'(x) = -\sin x + e^{\frac{\pi}{2}-x}$,令 $g(x) = -\sin x + e^{\frac{\pi}{2}-x},$

$g'(x) = -\cos x - e^{\frac{\pi}{2}-x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), g'(x) < 0, f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

则 $f'(x) > f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. 4 分

(2)由(1)知: $f(x) = \cos x - e^{\frac{\pi}{2}-x} + 1$,令 $f(x) = 0$ 得 $\cos x + 1 = e^{\frac{\pi}{2}-x},$

显然当 $x = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{N})$ 时等式不成立, 5 分

当 $x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$ 时, $\cos x + 1 = e^{\frac{\pi}{2}-x} > 0$,则 $\ln(\cos x + 1) = \frac{\pi}{2} - x,$

令 $h(x) = \ln(\cos x + 1) + x - \frac{\pi}{2}, h'(x) = 1 - \frac{\sin x}{\cos x + 1}.$ 8 分

因为 $\frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{\sin x - 0}{\cos x - (-1)}$ 表示单位圆上的点 $P(\cos x, \sin x)$ 与定点 $Q(-1, 0)$ 连线的斜率,

则当 $x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$ 时, $\frac{\sin x}{\cos x + 1} \in (1, +\infty), h'(x) = 1 - \frac{\sin x}{\cos x + 1} < 0,$

所以 $h(x)$ 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$ 上单调递减, $h\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi \geq 0,$ 10 分

当 $x \rightarrow 2k\pi + \pi, h(x) \rightarrow -\infty,$

由零点存在性定理可知,存在唯一的一个零点 $x_0 \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$ 使得 $h(x_0) = 0.$

故 $f(x)$ 在区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right) (k \in \mathbf{N})$ 内只有一个零点. 12 分